

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{3}{5}$

9. 若函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $e < a < b$, 则 () .

A. $f(a) < f(b)$

B. $f(a) = f(b)$

C. $f(a) > f(b)$

D. $f(a)f(b) > 1$

10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{\pi x}{m}$, 若存在 $f(x)$ 的极值点 x_0 满足 $x_0^2 + f^2(x_0) < m^2$, 则实数 m 的取值范围是 () .

A. $m < -2$ 或 $m > 2$

B. $-2 < m < 2$

C. $m > 2$

D. $m < 2$

二、填空题

(本大题共6小题, 每小题4分, 共24分)

11. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{y | y = 2x - 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____ .

12. 已知 $p(x) : x^2 + 2x - m > 0$, 若 $p(1)$ 是假命题, $p(2)$ 是真命题, 则实数 m 的取值范围为 _____ .

13. $\left(2x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中常数项是 _____ .

14. 从一副混合后的扑克牌 (52张) 中随机抽取2张, 则 “抽出的2张均为红桃” 的概率为 _____ (结果用最简分数表示) .

15. 若曲线 $y = kx + \ln x$ 在点 $(1, k)$ 处的切线平行于 x 轴, 则 $k =$ _____ .

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} - 3, & -1 < x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 若方程 $f(x) - mx - m = 0$ 有且只有两个不等的实根, 则实数 m 的取值范围为 _____ .

三、解答题

(本大题共4小题, 共46分)

17. 已知2件次品和3件正品混放在一起, 现需要通过检测将其区分, 每次随机检测一件产品, 检测后不放回, 直到检测出2件次品或者检测出3件正品时检测结束 .

(1) 求第一次检测出的是次品且第二次检测出的是正品的概率 ;

(2) 已知每检测一件产品需要费用100元, 设 X 表示直到检测出2件次品或者检测出3件正品时所需要的检测费用 (单位 : 元), 求 X 的分布列和均值 (数学期望) .

18. 现有10道题, 其中6道甲类题, 4道乙类题, 张同学从中任取3道题解答 .

(1) 求张同学至少取到1道乙类题的概率 ;

(2) 已知所取的3道题中有2道甲类题, 1道乙类题 . 设张同学答对甲类题的概率都是 $\frac{3}{5}$, 答对每道乙类题的概率都是 $\frac{4}{5}$, 且各题答对与否相互独立 . 用 X 表示张同学答对题的个数, 求 X 的分布列和数学期望 .

19. 设 $f(x) = a(x-5)^2 + 6 \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 y 轴相交于点 $(0, 6)$.

(1) 确定 a 的值 .

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值 .

20. 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax, a \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数求 a 的取值范围.

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2$ 恰有两个不等的极值点 $x_1、x_2$, 证明: $x_1 + x_2 < 2 \ln 2a$.